

I beviset for løsningsformlen for andengradsligningen  $a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$  lavede vi en omskrivning af ligningen, hvor vi ”færdiggjorde” kvadratet ved hjælp af kvadratsætningerne. Denne omskrivning kaldes en kvadratkomplettering. Denne rene algebraiske øvelse kan virke mærkelig abstrakt; hvor kommer  $4a$  f.eks. fra? Ligninger har dog historisk været langt tættere forbundet med geometriske problemer. Hvordan man kan anskue løsning af ligninger som geometri, skal vi se nærmere på i dette projekt.

I 800-tallet skrev den persiske matematiker Al-Khwarizmi om ligninger på en måde, som blev vigtig for algebraens tidlige udvikling. Hans fremstilling var dog ikke symbolsk som den algebra, vi bruger i dag; i stedet blev regneregler og løsninger beskrevet med ord og ofte begrundet geometrisk.

Hvordan man kan begrunde geometrisk kan vi forstå ved at se på et eksempel. Se for eksempel på andengradsudtrykket:

$$x^2 + 6x + 20.$$

Her kan første led tolkes som arealet af et kvadrat med siden  $x$ . Tilsvarende kan andet led tolkes som arealet af et rektangel med siderne 6 og  $x$ . Endelig kan det tredje led opfattes som arealet af en uspecificeret figur.

$$x^2 + 6x + 20 = x \begin{array}{|c|} \hline x^2 \\ \hline \end{array} + x \begin{array}{|c|c|} \hline 3x & 3x \\ \hline \end{array} + 20$$

$x$  6

Halveres rektanglet, kan de to dele flyttes rundt, så figuren næsten bliver til et stort kvadrat.

$$x^2 + 6x + 20 = \begin{array}{|c|c|} \hline \begin{array}{|c|} \hline 3x \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|} \hline 9 \\ \hline \end{array} \\ \hline \begin{array}{|c|} \hline x^2 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|} \hline 3x \\ \hline \end{array} \\ \hline \end{array} + 20$$

$x$  3

Nu ser vi, at der kun mangler et kvadrat med siden 3 for at fuldende figuren. Vi låner derfor arealet 9 fra konstantleddet og får omskrevet udtrykket til summen af et stort kvadrat og en ny konstant:

$$x^2 + 6x + 20 = \begin{array}{|c|c|} \hline \begin{array}{|c|} \hline 3x \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|} \hline 9 \\ \hline \end{array} \\ \hline \begin{array}{|c|} \hline x^2 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|} \hline 3x \\ \hline \end{array} \\ \hline \end{array} + 11 = (x+3)^2 + 11$$

$x$  3

Dermed får vi

$$x^2 + 6x + 20 = (x + 3)^2 + 11.$$

Denne visuelle tilgang har spillet en vigtig rolle langt tilbage i matematikkens historie. Først senere blev algebra i stigende grad udviklet som en mere symbolsk og abstrakt disciplin.

**Opgave 1** Lad os her prøve at gøre kvadrater helt konkrete. Forestil jer hvert led i følgende udregninger som arealet af en firkant. Kan man udregne det samlede areal som arealet af et enkelt kvadrat i stedet? Illustrer hvert eksempel.

- a)  $x^2 + 6x + 9$
- b)  $x^2 + 2x + 1$
- c)  $x^2 + 12x + 36$
- d)  $x^2 + 10x + 25$
- e)  $64 + 16x + x^2$

**Opgave 2** Som vi så i det indledende eksempel kan det ske at de tre firkanter ikke passer perfekt ind i hinanden. I sådanne tilfælde må man blot låne en del af det sidste areal, og vi ender altså med en rest. Færdiggør følgende kvadrater på denne måde; hvad sker der hvis det sidste areal ikke er stort nok?

- a)  $x^2 + 6x + 15$
- b)  $x^2 + 2x + 10$
- c)  $x^2 + 8x + 8$
- d)  $x^2 + 12x + 20$
- e)  $50 + 16x + x^2$

**Opgave 3** Lad os til sidst prøve at gøre det en anelse mere abstrakt. Hvis udregningerne ikke har tal (endnu), kan man så stadig tegne firkanterne? Prøv med følgende udtryk. Kontroller dit resultat ved at gange dit udtryk ud ved hjælp af kvadratsætningerne.

- a)  $x^2 + bx + c$
- b)  $x^2 + kx + l$
- c)  $x^2 + mx + n$